Matemática CEPJA Módulo 4
Apuntes de clase
Teorema de Pitágoras e Irracionales

con LaTeX 2_ε

Prof. Nicolás Rosbaco (nicolas.rosbaco@gmail.com)

Índice general

Capítulo 1

Los Números racionales

hasta el momento hemos trabajado con cantidades enteras y con fracciones... pues bien, estos números pueden ser agrupados en un conjunto, este conjunto numérico se denomina *conjunto de números racionales* y se representa con la siguiente letra: $\mathbb{Q}$.

En fin $\mathbb{Q}$ (el conjunto de números racionales) esta conformado por *todos los números enteros más todas las fracciones...* en un esfuerzo elaboramos la siguiente definición:

Definición 1 *El conjunto de números racionales esta constituido por aquellas expresiones numéricas que admitan ser expresadas como cociente de dos enteros coprimos.*

¿Traducimos?

Un número es miembro, pertenece, al conjunto $\mathbb{Q}$ si puede ser definido, expresado, calculado, como cociente (resultado de la división entera) entre otros dos: entero y coprimos.

¿Qué significa que los números sean coprimos?... pues que los únicos divisores comunes entre ellos dos sean 1 y -1.

Pensemos:

- 4 y 6 no son coprimos, ya que 2 es divisor de ambos
- 13 y 21 SI son coprimos, ya que los únicos divisores comunes entre ellos son 1 y -1
- 10 y 9 ¿Son coprimos? ¿por qué?
- 22 y 60 ¿Son coprimos? ¿por qué?

Bueno... resumiendo (cómo dice joaquín sabina). Para garantizar si un determinado número es racional se debe poder hallar dos enteros coprimos (entre sí) de modo que su cociente sea el número definido.... analicemos algunos ejemplos:

- el número 0,3 es un número racional, ya que: $0,3 = \dfrac{3}{10}$ (y sabemos que 3 y 10 son coprimos)
- el número 0,15 es un número racional, ya que: $0,15 = \dfrac{15}{100} = \dfrac{3}{20}$ (y sabemos que 3 y 20 son coprimos)

  completa tú:
- el número 0,23 es un número racional, ya que: ....
- el número 0,03 es un número racional, ya que: ....
- el número 4 es un número racional, ya que: ....
- el número -2 es un número racional, ya que: ....
- el número 0 es un número racional, ya que: ....

En fin, los números racionales se pueden sintetizar como el conjunto de todos los números enteros, más todas las fracciones.

Pero.... ¿estos son todos los números posibles?

Esta era la hipótesis en la época de Pitágoras!!! pero veremos que no es así.

Capítulo 2

Los números irracionales

2.1. El teorema de Pitágoras conspira con el propio Pitágoras

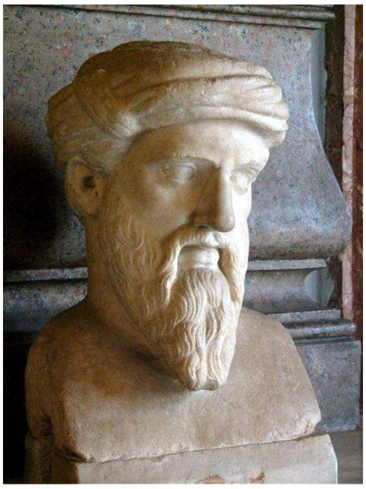

Figura 2.1: Busto de Pitágoras

Al *compañero Pitagoras*, del que no tenemos fotografías, por eso compartimos la imagen de un busto que lo representa, le debemos muchas ideas y descubrimientos... pero de lo que conversaremos es de una llamativa particularidad...

Resulta (permitase la banalidad con la que abordaremos el tema) que, cuando logra demostrar el Teorema que lleva su nombre, uno de los más famosos y conocidos sin dudas: el Teorema de Pitágoras (del que entraremos en detalles más adelante). Cuando arriba a la demostración del teorema ocurre algo increíble, ¿impensado?. En aquella época existían, en materia de conocimiento, los siguientes dos preceptos:

- todo lo que existe se puede representar con la matemática, todo aquello que existe se puede mesurar con alguna representación numérica.
- los números que se conocían, el campo numérico más amplio, es el mismo del que venimos hablando hasta este momento: el conjunto de números racionales.

Si traducimos apurados podemos decir que en aquella época se creía que todas las medidas posibles, de las cosas que existen, que son tangibles, se pueden comparar con algún número racional...

Pues bien, el Sr. Pitágoras logra demostrar el teorema, como decíamos, y este teorema permite determinar la medida de un lado de un triángulo rectángulo, conocidos los otros dos (también de esto estableceremos mayor detalle en los próximos párrafos)...

El teorema de Pitágoras se enuncia del siguiente modo, la demostración la dejamos para más tarde:

Definición 2 *En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos.*

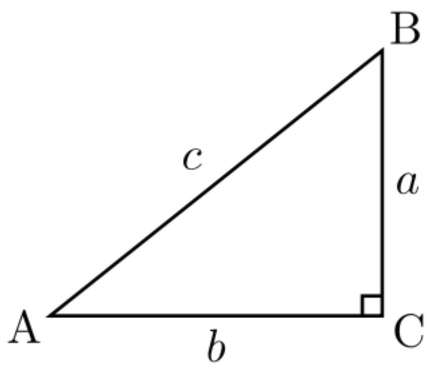

Figura 2.2: Triángulo Rectángulo

De acuerdo con la figura 2.2 podemos decir (en esta figura c es la hipotenusa; a y b son los catetos del triángulo):

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ok... ¿pero donde esta el dilema con respecto a este teorema?... avancemos en el siguiente ejemplo:

Consideremos el triángulo rectángulo e isósceles de la figura siguiente:

En este triángulo rectángulo (en el vértice B), el triángulo existe (no hay dudas) por lo tanto existen sus lados y en consecuencia se pueden medir... y por último, y de acuerdo con

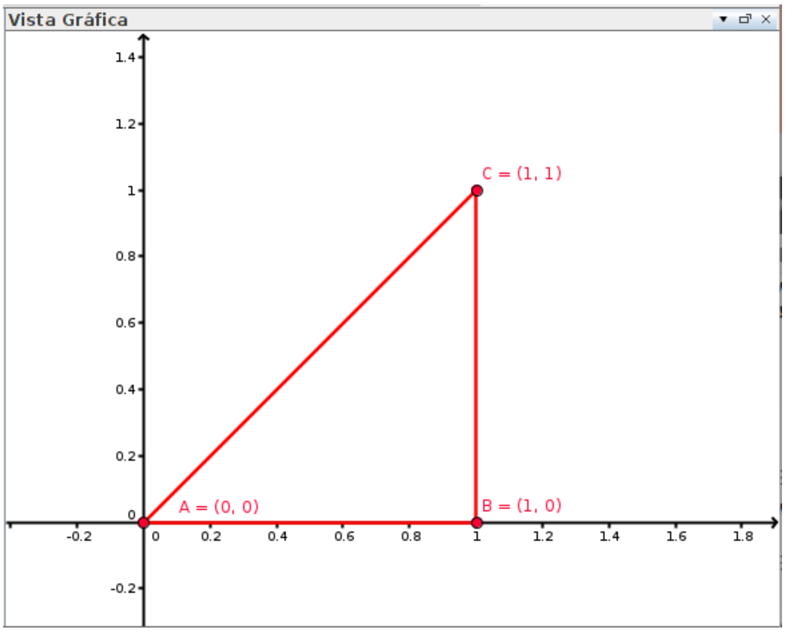

Figura 2.3: Triángulo Rectángulo: Actividad

los preceptos ya enunciados, esas medidas pueden ser identificadas con algún elemento del conjunto de números racionales ($\mathbb{Q}$).

De modo que:

- los segmentos $c = \overline{AB}$ y $a = \overline{BC}$ son los catetos, y ambos tienen como medida 1 ... por lo tanto $a = c = 1$
- la hipotenusa es el segmento $b = \overline{AC}$, desconocemos su medida... pero pensando en la época pitagórica estaríamos en condiciones de afirmar que su medida es un número racional...

¿Calculamos la medida de la hipotenusa?

Sabemos que:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Y sustituyendo con los datos conocidos resulta:

$$c^2 = 1^2 + 1^2$$

calculamos y tenemos:

$$c^2 = 2$$

y finalmente:

$$c = \sqrt{2}$$

es decir, la hipotenusa mide raíz cuadrada de 2.... de nuevo: la hipotenusa mide un número que elevado al cuadrado es 2...

Lo pitagóricos advirtieron con gran horror que no existe ningún número racional que elevado al cuadrado de como resultado dos... esto se puede demostrar, pero la verdad que escapa bastante a los límites de este modesto apunte; no obstante ello se deja para curios@s este enlace hacia la demostración.

Con lo cual, y para terminar este culebrón matemático: los pitágoricos, aferrados a sus creencias, antes de imaginar un conjunto numérico más amplio que el de los racionales, prefirieron intuír que su afirmación acerca de que todo podía ser mesurado con números era, al menos falaz.

Mucho tiempo después se comprendió la verdadera envergadura de este descubrimiento... *en realidad existían otros números*, justamente unos números *tan extraños* que no se podían expresar como cociente de dos enteros... como los primeros se conocían como **números racionales** a estos se los denominó como **números irracionales**.

Definición 3 *Los números irracionales son aquellos que no se pueden representar como cociente de dos enteros coprimos... en definitiva, aquellos que no son racionales.*

2.2. Tripletas pitagóricas

Si bien hemos analizado un caso en el cuál la hipotenusa de un triángulo rectángulo es un número irracional, podemos encontrar montones de casos en los cuáles los lados (todos ellos) de un triángulo rectángulo son números enteros.

Por caso, el triángulo rectángulo con catetos de medidas 3 y 4 (Figura 2.4)

Muy rápidamente podemos calcular la medida de la hipotenusa:

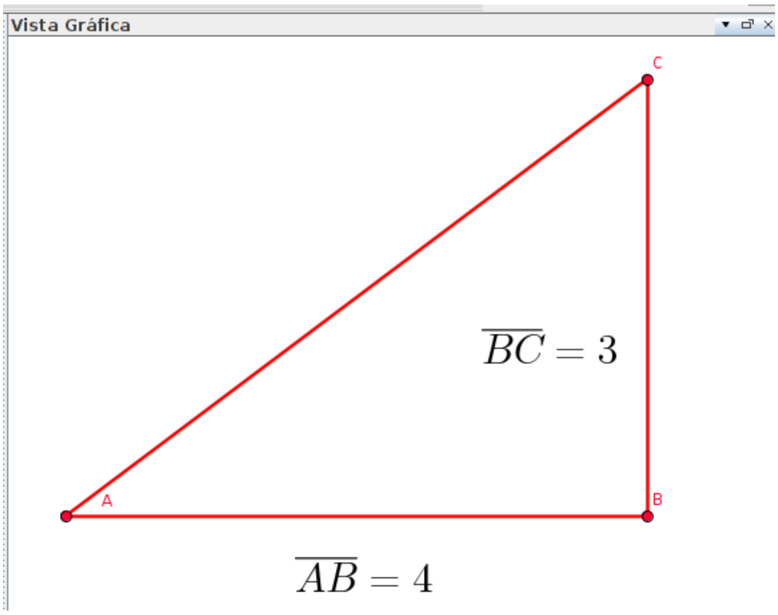

Figura 2.4: Tripletas pitágoricas

$$\begin{aligned}
hipotenusa^2 &= cateto_1^2 + cateto_2^2 \\
\overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \\
\overline{AC}^2 &= 4^2 + 3^2 \\
\overline{AC}^2 &= 16 + 9 \\
\overline{AC}^2 &= 25 \\
\overline{AC} &= \sqrt{25} \\
\overline{AC} &= 5
\end{aligned}$$

Es decir $= (3, 4, 5)$ son las medidas de los lados de un triángulo rectángulo. A esta tripla de valores enteros se la denomina *tripleta pitagórica*... con lo cuál yo propongo auqí abajo algunas triplas y uds. deben indicar en que caso esa tripla es una *tripleta pitagórica* (¿Cómo hago eso?[1])

- $(1, 2, 3) \rightarrow$
- $(2, 2, 3) \rightarrow$
- $(6, 8, 10) \rightarrow$
- $(8, 8, 8) \rightarrow$
- $(24, 36, 40) \rightarrow$
- $(15, 20, 25) \rightarrow$

[1] pues simplemente probamos si se cumple la identidad $hipotenusa^2 = cateto_1^2 + cateto_2^2$

NO continúes con la lectura hasta tanto resuelvas el punto anterior!!!

Analicemos los casos donde las triplas se determinaron como tripletas pitagóricas:

$(6, 8, 10) \rightarrow$
$(15, 20, 25) \rightarrow$
$(24, 36, 40) \rightarrow$

Observemos lo siguiente....

$(6, 8, 10) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5) = 2 \cdot (3, 4, 5)$
$(15, 20, 25) = (5 \cdot 3, 5 \cdot 4, 5 \cdot 5) = 5 \cdot (3, 4, 5)$
$(24, 36, 40) = (8 \cdot 3, 8 \cdot 4, 8 \cdot 5) = 8 \cdot (3, 4, 5)$

En fin, podemos obtener tripletas pitagóricas a partir de una conocida multiplicando por cualquier escalar entero sus componentes....

Demostremos esto...

Sea la tripleta pitagórica $(a, b, c) \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$; si elejimos un valor natural cualquiera, lo llamaremos $k, k \in \mathbb{N}$ tenemos que:

- $(c \cdot k)^2 = c^2 \cdot k^2$
- $(a \cdot k)^2 = a^2 \cdot k^2$
- $(b \cdot k)^2 = b^2 \cdot k^2$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
(c \cdot k)^2 &= (a \cdot k)^2 + (b \cdot k)^2 \\
c^2 \cdot k^2 &= a^2 \cdot k^2 + b^2 \cdot k^2 \\
c^2 \cdot k^2 &= k^2 \cdot (a^2 + b^2) \\
\frac{c^2 \cdot \cancel{k}^2}{\cancel{k}^2} &= \frac{\cancel{k}^2 \cdot (a^2 + b^2)}{\cancel{k}^2} \\
c^2 &= a^2 + b^2
\end{aligned}$$

¿Para que sirven las tripleatas pitagóricas, además de para preocupar estudiantes?... bueno, la verdad que este es uno de los teoremas de la matemática más difundido... y aunque no se crea, se utiliza mucho incluso sin saber que se esta aplicando.

En una práctica habitual en la albañilería utilizar una soga con 12 tramos iguales marcados con nudos, o algún otro tipo de marca.... ¿para qué?, pues para identificar direcciones perpendiculares.

Muchas veces se necesita construir una pared en forma perpendicular con otra. Puedes ver este video o analizar la siguiente imagen para entender de que forma Pitágoras esta presente en las más básicas actividades de la construcción, prescindiendo de sofisticados artefactos.

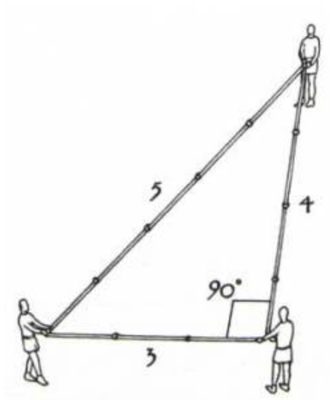

Figura 2.5: Cuerda con 12 nudos

Actividad 1 *Diseña otra cuerda que permita determinar direcciones perpendiculares. Pruebala en la pared de tu aula o de tu casa, realiza un informe, en lo posible con fotografías, que permita ilustrar la actividad.*

2.3. Algunos irracionales

Algunos ejemplos que aceptaremos sin demostración:

- $\pi \to$ es un número irracional, se lo puede escribir de forma aproximada con una calculadora científica, o con wxMaxima:

  (%i2) `%pi;`

  (%o2) π

  (%i3) `%pi,numer;`

  (%o3) 3,141592653589793

  π por irracional no permite predecir ni la cantidad de cifras decimales, ni tampoco un patrón... con lo cuál todo lo que nos queda es trabajar con sus aproximaciones...

- $\sqrt{5}$ es igualmente un número irracional, ¿probamos con su aproximación decimal?

  (%i4) `sqrt(5);`

  (%o4) $\sqrt{5}$

  (%i5) `sqrt(5),numer;`

  (%o5) 2,23606797749979

2.4. Pitágoras, los triángulos y los irracionales

¿Y que debemos hacer cuando nos encontramos con un número irracional?... pues se escribe en forma exacta (por ejemplo $\sqrt{5}$) y si hace falta considerar alguna aproximación. siguiendo con el mismo ejemplo: si $a = \sqrt{5}$ entonces una posible aproximación sería $a \simeq 2{,}236067$.

Probemos con algunos ejemplos:

Actividad 2 *Calcular el perímetro del siguiente triángulo:*

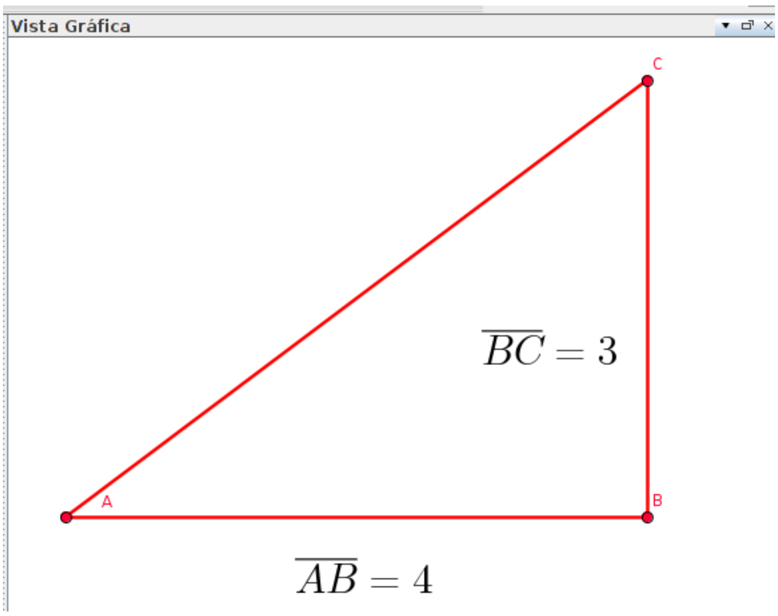

Figura 2.6: Cálculo de perímetro

El perímetro es la medida del contorno de la figura, en el caso que nos ocupa, el contorno de la figura está formado por lados rectos, con lo cual su perímetro se calcula como la suma de las medidas de los lados:

$$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$$

En nuestro caso tenemos que $\overline{AB} = 4; \overline{BC} = 3$ restaría determinar la medida de la hipotenusa... y para ello contamos con el Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = 4^2 + 3^2$$

caluclamos....

$$\overline{AC}^2 = 16 + 9 = 25$$

y finalmente:

$$\overline{AC} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{AC} = 5$$

El resultado es un número entero, en consecuencia racional... no aparece el problema de tratar con número irracionales.

Por último calculamos el perímetro:

$$P = 4 + 3 + 5 \Rightarrow P = 12$$

El perímetro del triángulo es 12

¿Fácil no?? hacemos otro??... pero está vez te toca a vos:

Actividad 3 *Determinar le perímetro de un triángulo cuyos vértices son los puntos del plano:* $A = (-1, 0)$, $B = (19, 0)$ *y* $C = (19, 15)$

Actividad 4 *Representar gráficamente y calcular el perímetro de un triángulo, sabiendo sus vértices son los puntos del Plano:* A, B *y* C*. Donde:* $A = (0, 0)$*; la medida del lado* $\overline{AB} = 7$*; la medida del ángulo interior, correspondiente al vértice* B *es:* $\widehat{B} = 90^o$*; la medida del lado* $\overline{BC} = 12$ *(y por si hace falta aclarar el lado* $\overline{AC}$ *es la hipotenusa.*

2.5. Irracionales en la recta numérica

Si bien los números irracionales tienen una estructura *muy extraña*. Es decir: poseen una cantidad indeterminada de cifras decimales y además carecen de patrones de repetición... lo que los hace de muy difícil escritura...

Recordemos:

El número $\sqrt{2}$ admite la siguiente representación decimal (aproximada) $\sqrt{2} \simeq 1{,}414213562373095$

¿Cómo podríamos hacer para representar este número en la recta numérica?

Evidentemente este número estaría ubicado entre $1,4$ y $1,5$, ente ellos, pero tampoco en el medio de ellos dos...

Desarrollaremos un método geométrico por el cuál, algunos número irracionales, podrán ser representados en la recta numérica. Para ello aprovecharemos el Teorema de Pitágoras.

A nadie escapa ya el hecho de $\sqrt{2}$ es la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 1cm (y si se esta escapando esta idea, en este momento, puede revisar estos cálculos, en la página 7.

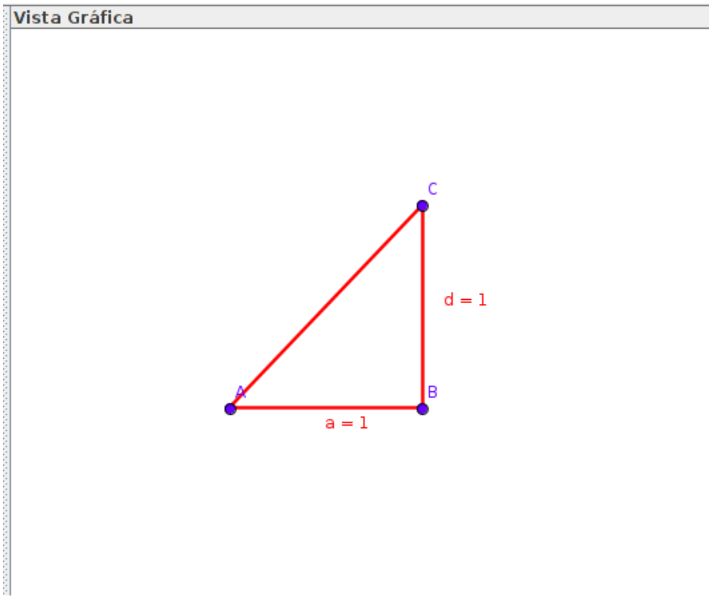

Figura 2.7: Triángulo rectángulo e isósceles

Con lo cuál para ubicar $\sqrt{2}$ en la recta numérica es suficiente con representar este triángulo en un sistemas de ejes cartesianos.

Analicemos como representar $\sqrt{2}$ en la recta numérica:

1. Utilizamos un sistema de ejes cartesianos, donde el eje horizontal (eje x) es ni más ni menos, la recta numérica donde queremos representar $\sqrt{2}$. En este sistema de ejes cartesianos representamos el triángulo rectángulo (el mismo de la Figura 2.7.

   El triángulo que representamos tiene vértices $A = (0, 0)$ (que es origen del sistema de coordenadas); $B = (1, 0)$ y $C = (1, 1)$, podemos observar esta construcción en la Figura 2.8. en definitiva lo que hemos hecho es trasladarlo para que quede *bien ubicado* en nuestro sistema de ejes.

2. el triángulo que acabamos de representar tiene una hipotenusa de medida $\sqrt{2}$ Con lo cual, solo debemos *trasladar* la medida de la hipotenusa sobre el eje x. Para ello utilizamos un compás... y si estás utilizando GeoGebra una circunferencia.

   Como sea que estas trabajando debemos representar una circunferencia con centro en el vértice A y radio igual a la medida de la hipotenusa. El punto de intersección entre esta circunferencia y el eje x es la representación sobre la recta numérica de $\sqrt{2}$. Es decir, en la Figura 2.9, podemos apreciar la representación del número irracional $\sqrt{2}$.

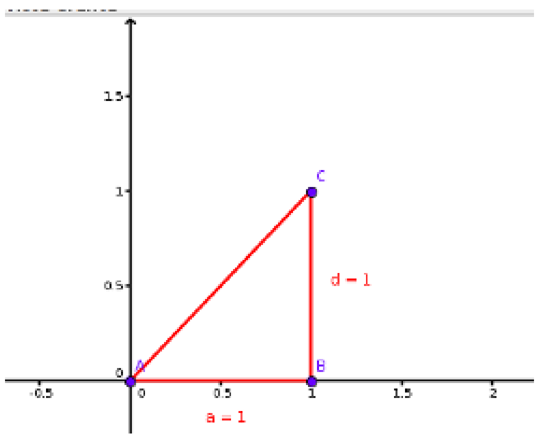

Figura 2.8: Triángulo en sistema de ejes cartesianos

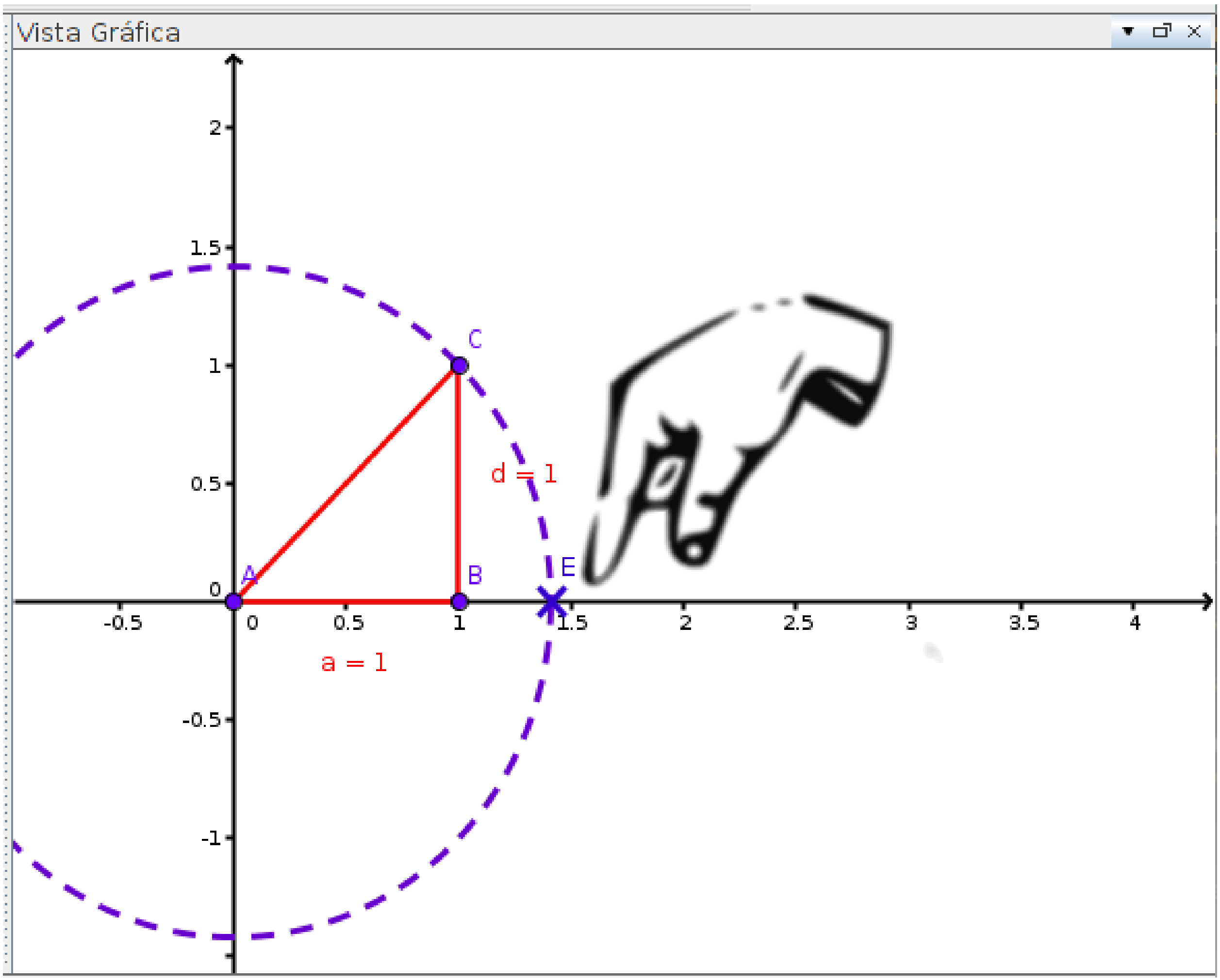

Figura 2.9: Representación de $\sqrt{2}$

Resumiendo (como dice Joaquín Sabina) podemos identificar, de forma exacta (gracias a un método de trabajo geométrico), algunos números irracionales, para ello debemos elegir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida el número irracional que deseamos representar...

Por ejemplo:

- para $\sqrt{2}$ el triángulo rectángulo tiene catetos de medida 1 (ambos). Ya que:

  $$hipotenusa^2 = cateto_1^2 + cateto_2^2$$

  y en el caso que analizamos:

  $$hipotenusa^2 = 1^2 + 1^2$$

  y...

  $$hipotenusa^2 = 2$$

  Por lo tanto:

  $$hipotenusa = \sqrt{2}$$

  Por lo tanto si utilizamos un triángulo rectángulo (e isósceles) cuyos catetos miden 1, la hipotenusa mide $\sqrt{2}$, y trasladando esa medida sobre el eje x (como hemos hecho en el desarrollo anterior) podemos representar el irracional $\sqrt{2}$ sobre la recta real.

- ¿Y si queremos representar $\sqrt{5}$?.... pues nada (o casi nada) cambia. Debemos pensar en un triángulo rectángulo, cuyos catetos tengan medidas a determinar para que la medida de la hipotenusa sea exactamente $\sqrt{5}$

  Pensemos...

  $$hipotenusa^2 = cateto_1^2 + cateto_2^2$$

  en nuestro caso:

  $$(\sqrt{5})^2 = cateto_1^2 + cateto_2^2$$

  Pero sabemos que $(\sqrt{5})^2 = 5$... por lo tanto:

  $$5 = cateto_1^2 + cateto_2^2$$

  Debemos encontrar a, b de modo que $a^2 + b^2 = 5$

  

  No avances en la lectura hasta hallar los valores buscados!!!

  Bueno, ahora si (imagino has avanzado, o por lo menos invertido un buen tiempo) en determinar los valores a y b.... pensemos entre tod@s:

  $$1^2 = 1; 2^2 = 4 \Rightarrow 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow a = 1; b = 2$$

  Por lo tanto necesitamos utilizar un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 y 1 respectivamente... podemos ver la ilustración en la Figura 2.11

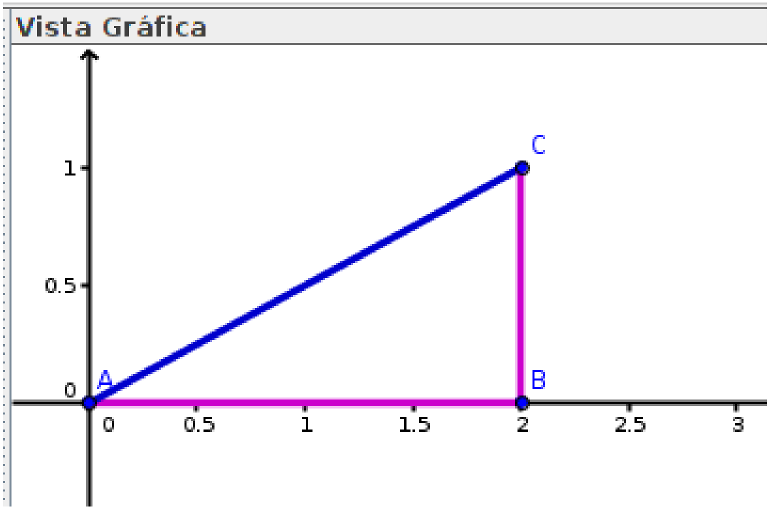

Figura 2.10: Representación de $\sqrt{5}$

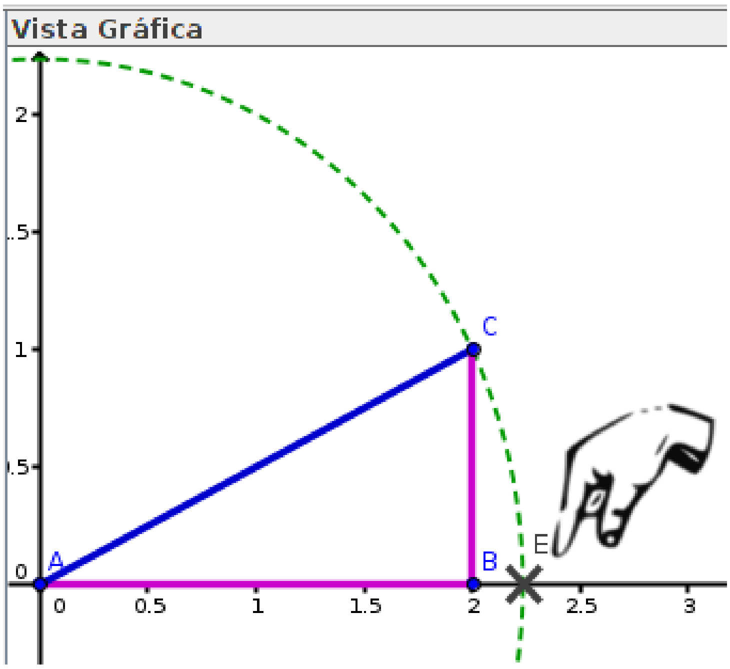

Figura 2.11: Representación de $\sqrt{5}$

La Hipotenusa esta representada en azul y debemos transportar esa medida sobre el eje horizontal... Nuevamente nos apoyamos para ello, en una circunferencia también con centro en el origen de coordenadas, y cuyo radio coincide con la hipotenusa del triángulo.

Una vez más: el punto E representa la raíz cuadrada de cinco ($\sqrt{5}$) en la recta real (por si hace falta hay un dedo señalando ;-)

Actividad 5 *Representar en la recta numérica los siguientes irracionales*